# 18 СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Жизнь — без начала и конца.  
Нас всех подстерегает случай.  
Над нами – сумрак неминучий,  
Иль ясность Божьего лица.

Александр БЛОК

Во всех предшествующих лекциях рассматривались ***детерминированные системы***. В них в случае многократного проведения эксперимента при одних и тех же условиях наблюдается один и тот же результат. Состояние детерминированной системы можно охарактеризовать с помощью одной или нескольких функций состояния (в ряде случаев – векторов, последовательностей, матриц и т.д.), принимающих вполне определенные конкретные значения в любой точке из области их определения для любого набора параметров системы. Математические модели таких систем при всём их многообразии представляли собой задачи, позволяющие, в принципе, восстановить конкретный закон изменения соответствующих функций состояния.

Однако существует широкий класс процессов, в которых в силу тех или иных причин постановка эксперимента при одних и тех же условиях приводит к различным результатам, а предугадать появление некоторого события в результате единичного эксперимента не представляется возможным. Соответствующие системы называются ***стохастическими***. Важно отметить, что хотя здесь невозможно точное предсказание исхода случайного события, можно многое сказать о его свойствах. В этой связи стохастические системы также могут быть объектом математического анализа. Они описываются качественно иными моделями, для анализа которых требуется использование специальных методов ***теории вероятностей***[[1]](#endnote-1) и ***математической статистики***[[2]](#endnote-2).

В настоящей лекции описываются достаточно простые стохастические системы. Мы будем рассматривать главным образом стохастические аналоги простейшей модели динамики популяций – модели Мальтуса[[3]](#endnote-3). В частности, в Разделе 1 исследуется эволюция биологического вида, когда рождение особи является случайным событием. Вследствие этого численность популяции оказывается случайной величиной, а ее изменение со временем – случайным процессом. Математической моделью данного процесса является система дифференциально-разностных уравнений относительно вероятности того, что численность вида в конкретный момент времени принимает определенное значение. Определяются числовые характеристики рассматриваемого случайного процесса. Для численного анализа системы может быть использован метод Монте-Карло, описанный в Разделе 2. В Разделе 3 рассматривается популяция, в которой случайным событием является уже смерть особи, а в Разделе 4 случайны как рождение, так и смерть. В Приложении рассматриваются известные математические модели различных процессов, в которых некоторые параметры являются случайными. Кроме того, приводятся некоторые дискретные стохастические системы[[4]](#endnote-4).

### **ЛЕКЦИЯ**

#### **1. Стохастическая модель чистого рождения**

Пусть имеется один биологический вид, находящийся в благоприятных условиях. Как отмечалось в Главе 7, его численность *x=x*(*t*) в простейшем случае описывается моделью Мальтуса, которая определяется дифференциальным уравнением ** с положительным приростом *k*. Согласно этому равенству, за сколь угодно малый интервал времени *dt* численность популяции увеличится на величину *kxdt*, т.е. изменение численности популяции за указанное время прямо пропорционально значению этой численности и величине временного интервала. Предположим, что в начальный момент времени *t=*0 популяция имеет начальную численность *m*. Тогда со временем наблюдается экспоненциальный рост популяции в соответствии с равенством *x*(*t*) = *mekt*. Полученные результаты относятся также к ***модели чистого рождения***, когда смертность вида вообще не учитывается, а коэффициент *k* характеризует его рождаемость.

Обратимся теперь к стохастическому аналогу этого процесса. Рождение особи в то или иное время будем теперь считать ***случайным событием***[[5]](#endnote-5). Вследствие этого численность данной популяции *x*(*t*) в произвольный момент времени *t* уже не будет конкретным числом, как в детерминированной модели, а оказывается ***случайной величиной***[[6]](#endnote-6). Тогда изменение со временем численности популяции представляет собой не какую-либо конкретную функцию *x=x*(*t*), а является ***случайным процессом***[[7]](#endnote-7). Математическая модель в детерминированном случае представляет собой некоторую задачу, позволяющую определить закон изменения функции состояния системы со временем. Стохастическая же модель позволяет определить изменение со временем ***вероятности*** того, что указанная случайная величина принимает то или иное значение[[8]](#endnote-8).

Очевидно, вероятность того, что при численности популяции *n* в течение достаточно малого интервала времени Δ*t* родится одна особь будет тем выше, чем больше популяция и данный временной интервал. В простейшем случае ее можно считать равной значению *kn*Δ*t*, где *k –* некоторая положительная константа, характеризующая рождаемость[[9]](#endnote-9). Обозначим через *pn*(*t*) вероятность того, что в момент времени *t* имеется ровно *n* особей[[10]](#endnote-10), что записывается следующим образом *pn*(*t*) = **P**{*x*(*t*)=*n*}. Поскольку интервал Δ*t* выбирается достаточно малым, будем полагать, что за это время может произойти лишь одно событие. В частности, возможно, хотя и не обязательно, рождение одной новой особи. Тогда наличие *n* особей в последующий момент времени *t*+Δ*t* возможно либо в том случае, когда в предшествующий момент времени *t* число особей было также равно *n*, и за время Δ*t* рождение новой особи не произошло, либо когда ранее было число особей *n*–1, и за это время родилась одна особь.

Известно, что вероятность двух ***несовместных событий*** равна сумме вероятностей этих событий[[11]](#endnote-11). В частности, несовместимо наличие в одно и то же время разной численности популяции. Тогда вероятность *pn*(*t*+Δ*t*) того, что в момент времени *t*+Δ*t* в популяции имеется ровно *n* особей, складывается из вероятностисобытия *A*,состоящего в того, что ранее численность популяции была равна *n*–1, и за это время родилась одна особь, и вероятности события *B*,согласно которому популяция насчитывала *n* особей, и за время Δ*t* никто не родился. Таким образом, справедливо равенство *pn*(*t*+Δ*t*) = *p*(*A*)+*p*(*B*), где через *p*(*A*) и *p*(*B*) обозначены вероятности соответствующих событий.

Каждое из двух указанных событий является результатом одновременного выполнения двух более простых событий. В частности, для события *A* речь идет о рождении одной особи за данное время и о численности популяции *n*–1. Но вероятность первого из этих событий зависит от реализации второго события, т.е. мы имеем дело с ***условной вероятностью***[[12]](#endnote-12). В этом случае вероятность события *A* будет равна произведению указанной условной вероятности, т.е. величины *k*(*n*–1)Δ*t*,и вероятности наличия численности *n*–1 в момент времени *t*, т.е. величины *pn*-1(*t*). Таким образом, находим вероятность *p*(*A*) = *pn*-1(*t*)*k*(*n*–1)Δ*t.*

Аналогично, событие *B* предполагает отсутствии рождения особи за данное время и наличие в момент времени *t* численности *n*. Вероятность отсутствия рождения потомства у одной особи за время Δ*t* равно (1–*k*)Δ*t*. Тогда при численности *n* вероятность отсутствия рождения за рассматриваемое время равно (1–*k*)*n*Δ*t*. В результате находим *p*(*B*) = *pn*(*t*)(1–*k*)*n*Δ*t*. Теперь определяем значение

*pn*(*t*+Δ*t*) = *pn*-1(*t*)*k*(*n*–1)Δ*t + pn*(*t*)(1–*k*)*n*Δ*t*.

Разделив полученное выражение на Δ*t*, будем иметь



Переходя к пределу при Δ*t*, стремящимся к нулю, получаем дифференциальное уравнение

 (18.1)

Оно позволяет определить изменение со временем вероятности того, что численность популяции равна *n* при условии, что известна вероятность *pn*-1(*t*).

Равенство (18.1) имеет смысл при *n*>1, поскольку при *n*=0 (при полном отсутствии особей) рождение невозможно. Отметим, что в момент Δ*t*+Δ*t* численность, равная 1, может быть исключительно в том случае, когда в предшествующий момент времени была такая же численность, и за это время рождение новой особи не произошло. В результате получаем *p*1(*t*+Δ*t*) = *p*1(*t*)(1–*k*)Δ*t.* Отсюда после деления на Δ*t* и перехода к пределу получаем уравнение

 (18.2)

Предположим для простоты, что в начальный момент времени *t=*0 имеется лишь одна особь. Таким образом, мы имеем начальные условия

*p*1(0) = 1; *pn*(0) = 0, *n*>1, (18.3)

поскольку наличие одной особи в начальный момент времени является достоверным событием, а иная начальная численность невозможна.

Итак, математической моделью рассматриваемой стохастической системы является бесконечная система дифференциальных уравнений (18.1), (18.2) с начальными условиями (18.3) относительно вероятностей наличия той или иной численности популяции, т.е. ***распределения вероятностей*** соответствующей случайной величины в произвольный момент времени[[13]](#endnote-13). В рассматриваемой системе независимыми переменными является время *t* и число особей *n.* Исходя из их свойств данную систему можно считать ***дифференциально-разностной***[[14]](#endnote-14).Из нее можно найти соответствующие вероятности и установить свойства исследуемого случайного процесса. Отметим, что рассматриваемая случайная величина является ***дискретной***, поскольку она может принимать лишь отдельные значения 1,2,….

Решение уравнения (18.2) с первым начальным условием (18.3) определяется по формуле *p*1(*t*)=*e*–*kt*. Отсюда следует, в частности, что вероятность того, что численность вида останется равной 1, со временем стремится к нулю, т.е. популяция наверняка возрастет. Подставляя это значение в формулу (18.1) при *n=*2, имеем



Решая это уравнение с начальным условием (18.2), будем иметь[[15]](#endnote-15) 

Очевидно, функция *p*2 равна нулю в начальный момент времени, положительна для всех *t* и стремится к нулю при *t*→∞. Следовательно, где-то она достигает своего максимального значения. Для его нахождения обращаем в нуль ее производную:



Отсюда следует *e-kt*=1/2. Таким образом, максимум функции *p*2 достигается в момент времени ln2/*k* и равен 1/4. Итак, вероятность того, что численность популяции равна двум изначально равна нулю, затем возрастает вплоть до момента времени ln2/*k*, достигая при этом значения 1/4, после чего убывает и стремится к нулю при неограниченном возрастании времени.

Решая уравнение (18.1) с начальным условием при *n=*3,4,…, приходим к формуле

 (18.4)

Нетрудно убедиться[[16]](#endnote-16), что функция *pn*, будучи равной нулю изначально, она возрастает до момента времени ln*n*/*k*, достигая при этом значения (*n*–1)*n*–1/*nn*,после чего убывает и стремится к нулю при неограниченном возрастании времени, см. Рис. 18.1. Итак, случайная величина *x*(*t*) характеризуется распределением вероятностей[[17]](#endnote-17) *pn*(*t*).

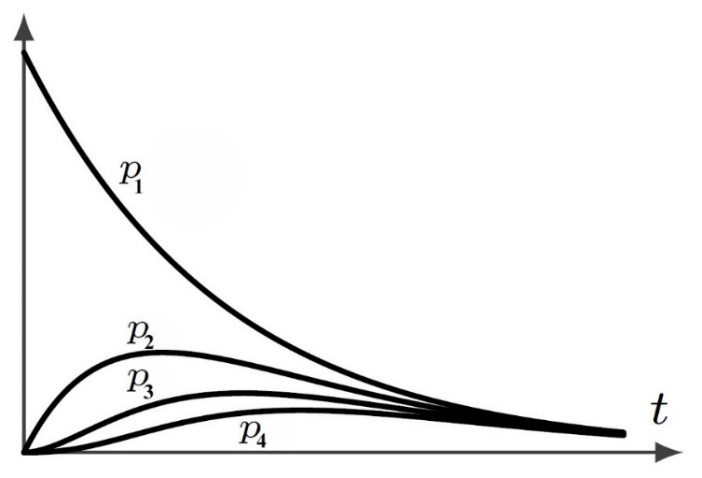


Рис. 18.1. Распределение вероятностей в модели чистого рождения.

При описании случайной величины зачастую можно ограничиться анализом ее некоторых численных характеристик, называемых ***моментами***. Важнейшей из таких характеристик является ***математическое ожидание*** случайной величины, соответствующее ее среднему значению. Математическое ожидание дискретной случайной величины *x*(*t*), принимающей значения *n* с вероятностью *pn*(*t*), *n=*1,2,…, определяется по формуле



В результате находим[[18]](#endnote-18) **E**[*x*(*t*)]=*ekt*. Характерно, что детерминированная модель Мальтуса с положительным приростом *k* и единичной начальной численностью дает в точности такой же закон изменения численности вида. Таким образом, рассматриваемый случайный процесс в среднем ведет себя так же, как и детерминированная модель. Естественно, чем больше популяция, тем ближе значения соответствующей случайной величины к ее математическому ожиданию, а значит, тем лучше детерминированная модель описывает исследуемый процесс.

Мерой отклонения значений случайной величины *x* от ее математического ожидания является ***дисперсия***. Она определяется по формуле



Для рассматриваемой случайной величины *x*(*t*) после несложных преобразований находим[[19]](#endnote-19) Таким образом, в начальный момент времени дисперсия равна нулю, поскольку начальное состояние системы известно. Однако со временем значение случайной величины может сколь угодно далеко отклоняться от своего математического ожидания.

Полученные результаты легко распространяются на общий случай, когда начальная численность вида принимает некоторое значение *m.* Поскольку смертность не учитывается, то вероятность того, что в какое-то время численность принимает значение *m*–1, будет равна нулю. Тогда из равенства (18.1) при *n=m* следует уравнение



являющееся обобщением уравнения (18.2). Решая его с начальным условием *pm*(0)=1, находим *pm*(*t*) = *e*–*mkt*. Тем самым вероятность того, что численность популяции будет равна *m* убывает от единицы в начальный момент времени до нуля при неограниченном возрастании времени.

Решая уравнение (18.1) с нулевыми начальными последовательно для значений *m+*1, *m+*2 и т.д., приходим к равенству

 (18.5)

справедливому при *n=m*,*m+*1,…,где числа  являются биномиальными коэффициентами[[20]](#endnote-20). Полученный результат обобщает формулу (18.4). Повторяя предшествующие рассуждения, можно убедиться, что вероятность того, что численность популяции будет равна *n* изначально равна нулю, возрастает вплоть до момента времени ln(*m*/*n*)/*k*,а потом стремится к нулю при неограниченном возрастании времени.

Для случайной величины *x*(*t*) можно найти математическое ожидание и дисперсию



Итак, в общем случае математическое ожидание для численности популяции в случае стохастического аналога модели Мальтуса чистого рождения также совпадает с изменением численности популяции в детерминированной модели. При этом со временем значения *x*(*t*) могут все сильнее отклоняться от его математического ожидания. Сравнительный анализ детерминированной и стохастической моделей чистого рождения приводится в Таблице 18.1.

Таблица 18.1. Детерминированная и стохастическая модели чистого рождения.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***характеристика*** | **детерминированная модель** | **стохастическая модель** |
| *независимые переменные* | время | время и число особей |
| *значение численности* *x*(*t*) | число | случайная величина |
| *функция состояния* *x=x*(*t*) | функция | случайный процесс |
| *основной закон* *kxdt* | прирост численности популяции за время *dt* при численности *x* | вероятность рождения особи за время *dt* при численности *x* |
| *начальная численность* *x*(0) | число | число |
| *уравнение состояния* | дифференциальное уравнение | дифференциально-разностная система |
| *результат* *m* exp(-*kt*) | закон изменения численности | математическое ожидание |

Ранее мы уже многократно сталкивались с ситуацией, когда одна и та же математическая модель описывала различные процессы. Другой интерпретацией стохастической модели чистого рождения является процесс ***распространения эпидемий***. Здесь заражение нового человека в тот или иной момент времени считается случайным событием. Тогда число зараженных людей *x*(*t*) в момент времени *t* оказывается случайной величиной, а функция *x=x*(*t*) будет случайным процессом. Очевидно, вероятность того, что при числе зараженных *n* в течение достаточно малого интервала времени Δ*t* заразится еще один человек будет тем выше, чем больше зараженных и временной интервал. В результате вероятность *pn*(*t*) того, что в момент времени *t* имеется ровно *n* зараженных, будет описываться соотношениями (18.1) – (18.3). Более сложная стохастическая модель распространение эпидемии рассматривается в Приложении.

Физическим аналогом рассматриваемых процессов является ***цепная ядерная реакция***, например, деление ядер тяжелых элементов[[21]](#endnote-21). Она представляет собой последовательность единичных ядерных реакций, каждая из которых вызывается частицей, в частности, нейтроном, появившейся как продукт реакции на предыдущем шаге последовательности. Единичное деление ядра с образованием свободных нейтронов в тот или иной момент времени можно считать случайным событием. Вследствие этого число *x*(*t*) свободных нейтронов в момент времени *t* оказывается случайной величиной. Вероятность распада одного ядра в течение достаточно малого интервала времени будет тем выше, чем больше имеется свободных нейтронов и данный интервал времени. Экспоненциальному росту популяции и развитию эпидемии здесь соответствует ядерный взрыв. Аналогичным образом можно описывать ***цепные химические реакции***, в которых роль нейтронов играют свободные атомы или радикалы[[22]](#endnote-22).

Сравнительный анализ различных стохастических моделей чистого рождения проводится в Таблице 18.2.

Таблица 18.2. Стохастические модели чистого рождения.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **биология** | **эпидемиология** | **физика** |
| *процесс* | рост популяции | развитие эпидемии | цепная реакция |
| *случайное событие* | рождение особи | заражение человека | распад ядра |
| *случайная величина* | численность популяции | число зараженных | число свободных нейтронов |
| *вероятный исход* | экспоненциальный  рост популяции | экспоненциальный  рост заболеваемости | ядерный взрыв |

***Стохастическая модель чистого рождения описывает процесс,  
в котором рождение особи считается случайным событием.  
Модель характеризуется дифференциально-разностными уравнениями.  
Математическое ожидание процесса соответствует модели Мальтуса.  
Со временем возможны сколь угодно большие отклонения  
численности популяции от ее математического ожидания.***

#### **2. Метод Монте-Карло**

В предшествующем разделе рассматривался случайный процесс чистого рождения. Мы определили для него распределение вероятностей численности популяции, а вслед за этим – соответствующие математическое ожидании и дисперсию. Это позволило установить некоторые закономерности исследуемой системы. Однако для практического анализа рассматриваемого процесса хотелось бы также определить, как меняется со временем численность популяции, являющаяся случайной величиной в каждый момент времени. Для решения подобных задач применяется ***метод Монте-Карло***[[23]](#endnote-23). Он основан на получении достаточно большого числа реализации некоторого случайного процесса так, чтобы его вероятностные характеристики совпадали с соответствующими вероятностными характеристиками исследуемого процесса.

Пусть, в частности, имеется случайная величина *x*, имеющая заданное значение *m* математического ожидания. Попытаемся найти такую случайную величину, которая с достаточно высокой степенью точности имеет *m* в качестве своего математического ожидания. Теоретической основой для решения этой задачи служат понятие нормального распределения вероятности и центральная предельная теорема.

В предшествующем разделе рассматривались случайные величины с дискретным множеством значений. Однако часто в качестве множества значений выступает некоторая протяженная область. Таким образом, речь идет о ***непрерывной случайной величине***. Вероятность того, что случайная величина *x* принимает значение из некоторого отрезка [*a*,*b*] равна

**

Здесь функция *f* является основной характеристикой рассматриваемой величины, называется ***плотностью вероятности*** и обладает следующими свойствами:



Соответствующеематематическое ожидание вычисляется по формуле



а дисперсия определяется так же, как и раньше, т.е. 

Особый интерес представляет ***нормальное распределение***, для которого плотность вероятности определяется по формуле (см. Рис. 18.2)



где константы *μ* и *σ* являются параметрами случайной величины, соответствующими ее математическому ожиданию и квадратному корню из дисперсии. Отметим ***правило трех сигм***, согласно которому вероятность того, что случайная величина *x* отличается от своего математического ожидания *μ* не более чем на 3*σ* примерно составляет 0.9973, т.е.

**

Таким образом, практически все значения случайной величины лежат на интервале   
(*μ*–3*σ*,*μ*+3*σ*). Чрезвычайная важность нормального распределения проясняется с помощью центральной предельной теоремы.

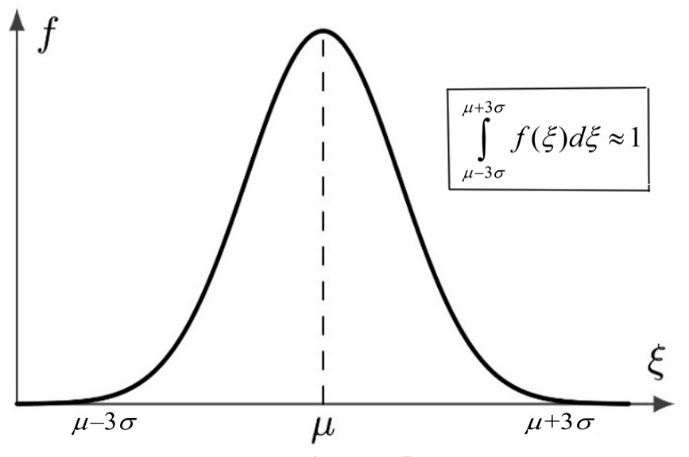


Рис. 18.2. Плотность вероятности нормального распределения.

Пусть заданы случайные величины *x*1,…,*xN*, которые предполагаются независимыми[[24]](#endnote-24) и имеющими одно и то же распределение. Тогда все они имеют одни и те же математическое ожидание *μ* и дисперсию *σ*2. Из определения этих характеристик непосредственно следует, что их сумма *ρN* =*x*1+…+ *xN* имеет математическое ожидание *Nμ* и дисперсию *Nσ*2. Рассмотрим теперь случайную величину *ζ N*,имеющую нормальное распределение с теми же значениями математического ожидания и дисперсии. Тогда согласно ***центральной предельной теореме*** при достаточно больших значениях *N* для любого интервала [*a*,*b*] вероятность того, что *ρN* лежит на этом интервале примерно равна

**

где *f* есть плотность распределения величину *ζ N*. Таким образом, сумма достаточно большого количества независимых случайных величин имеет распределение, достаточно близкое к нормальному.

Теперь вернемся к задаче определения случайной величины *x* с математическим ожиданием *m*. Пусть *x*1,…,*xN* являются независимыми случайными величинами с распределением, совпадающим с распределением *x*. Согласно центральной предельной теореме, при достаточно большом *N* распределение суммы *ρN*=*x*1+…+*xN* случайных величин оказывается примерно нормальным с математическим ожиданием *μ*=*Ny* и дисперсией *σ*2=*Nδ*2, где *δ* 2 – дисперсия *x*. Тогда в соответствии с правилом трех сигм будет выполняться соотношение

**

откуда следует

** (18.6)

Пусть найдено *N* значений некоторой случайной величины с математическим ожиданием *m*. Согласно соотношению (18.6), среднее арифметическое этих значений будет приближенно равно *m* со степенью точности, определяемой дисперсией данной случайной величины и числом выбранных значений. Погрешность этого приближения стремится к нулю с ростом числа *N*. Таким образом, для стохастического моделирования случайной величины с заданным математическим ожиданием требуется выбрать достаточно большое количество значений случайной величины с тем распределением, взять их среднее арифметическое и получить соответствующую оценку точности. Итак, мы сможем, в принципе, определить с желаемой точностью, искомую случайную величину, если будем иметь эффективный способ выбора ее значений по заданному распределению вероятности.

Рассмотрим дискретную случайную величину *x*, принимающую значения *x*1,…,*xn* с вероятностями *p*1,…,*pn* соответственно. Определим на отрезке [0,1] точки *y*0=0, *y*1=*p*1, *y*2=*p*1+*p*2, …, *yn*-1=*p*1+*p*2+…+*pn*-1, *yn*=1. Очевидно, длина интервала (*yi-*1,*yi*) будет равна *pi*, *i=*1,…*n*. Выбираем теперь произвольным образом некоторую точку из единичного интервала[[25]](#endnote-25). Если эта точка попадает на интервал (*yi-*1,*yi*), то в качестве значения случайной величины *x* в данном эксперименте выбирается ее значение *xi*. Естественно, вероятность реализации именно этого значения в данном эксперименте определяется длиной соответствующего интервала, которая и равна *pi* в соответствии с имеющимся распределением вероятностей.

Пусть теперь случайная величина *x* распределена непрерывно на некотором интервале (*a*,*b*) с плотностью вероятности *f=f*(*ξ*).Очевидно, вероятность *p* того, что рассматриваемая случайная величина будет лежать на интервале (*a*,*c*) будет равна

**  (18.6)

Задавая произвольным образом число *p* из единичного отрезка, рассматриваем соотношение (18.6) как уравнение относительно числа *c*. Его решение и выбирается в качестве значения рассматриваемой случайной величины[[26]](#endnote-26).

Итак, имеются способы определения значений случайной величины с заданным распределением вероятностей, что позволяет использовать метод Монте-Карло для моделирования рассматриваемой случайной величины. Этот метод используется для моделирования различных случайных процессов и в последующих разделах.

**Задание 18.1. *Модель чистого рождения*.** В соответствии с методом Монте-Карло рассчитать случайный процесс чистого рождения с начальным условием *x*(0)=*m.* Значения численности популяции рассматриваются в моменты времени *tj=jτ*, *j* = 1,2,…, где *τ* достаточно малый шаг по времени. Количество временных моментов выбирается столь большим, чтобы по ним можно было судить о развитии случайного процесса. При этом выполняются следующие действия:

1. В соответствии с формулой (18.5) определяются вероятности *pn*(*tj*) того, что случайная величина *x*(*tj*) принимает значения *n*. При этом в качестве минимального значения *n* выбирается значение случайной величины *x*(*ti-*1) в предшествующий момент времени, а в качестве его максимального значения – максимальное значение *n*, при котором выполняется неравенство *pn*(*tj*)>0.01.
2. Для полученного распределения вероятностей в соответствии описанной методикой выбираются достаточнобольшое числоиспытаний *N*, т.е. значений данной случайной величины[[27]](#endnote-27). В качестве значения случайной величины *x*(*tj*) выбирается их среднее арифметическое.
3. Строится график зависимости полученных значений численности популяции от времени в сравнении с соответствующим математическим ожиданием.
4. Определяется среднеквадратичное отклонение полученного результата от математического ожидания в различные моменты времени. Результаты сравниваются с известным значением дисперсии.
5. Проверяется насколько расчетное время достижения популяции той или иной численности согласуется с максимальной вероятности достижения этого значения.

***Для моделирования случайных величин применяется метод Монте-Карло.  
Метод связан с расчетом большого числа реализаций случайной величины   
с теми же вероятностные характеристики, что и данная случайная величина.***

#### **3. Стохастическая модель гибели популяции**

Рассмотрим теперь процесс гибели популяции. Согласно модели Мальтуса (см. Глава 7), этот процесс описывается дифференциальным уравнением ** с положительным коэффициентом *k*. Согласно данному равенству за сколь угодно малый интервал времени *dt* численность популяции уменьшится на величину *kxdt*, т.е. изменение численности популяции за указанное время прямо пропорционально значению этой численности и величине временного интервала. Тогда со временем наблюдается вымирание популяции в соответствии с равенством *x*(*t*) = *m* *e*–*kt*, где *m* – начальная численность популяции.

Рассмотрим стохастический аналог этого процесса. Вероятность того, что при численности популяции *n* в течение достаточно малого интервала времени Δ*t* умрет одна особь тем выше, чем больше популяция и данный временной интервал. Таким образом, она равна значению *kn*Δ*t*, где *k –* некоторая положительная константа. Обозначим вновь через *pn*(*t*) вероятность того, что в момент времени *t* имеется ровно *n* особей. Поскольку интервал Δ*t* является достаточно малым, будем полагать, что за это время может произойти, хотя и не обязательно, смерть лишь одной особи. В этих условиях наличие *n* особей в последующий момент времени *t*+Δ*t* возможно либо в том случае, когда в предшествующий момент времени *t* число особей было равно *n*, т.е. никто не умер, либо когда ранее было число особей *n*+1, и за время Δ*t* умерла одна особь.

Повторяя рассуждения из предшествующего раздела, приходим к равенству

*pn*(*t*+Δ*t*) = *pn*(*t*)(1–*k*)*n*Δ*t + pn*+1(*t*)*k*(*n*+1)Δ*t*.

Отсюда следует



Переходя к пределу при Δ*t*, стремящимся к нулю, получаем дифференциальное уравнение

 (18.7)

Предполагается, что в начальный момент времени численность популяции равна *m*. В результате приходим к начальным условиям

*pm*(0) = 1; *pn*(0) = 0, *n*<*m.* (18.8)

Очевидно, численность популяции со временем не возрастает, а значит, вероятность того, в какой-то момент времени численность превысит *m*, равна нулю. В данном случае, численность популяции *x*(*t*) в момент времени *t* вновь является дискретной случайной величиной с конечным множеством значений 0,1,…,*m*. Полагая в равенстве (18.7) *n=m*, приходим к уравнению



Решая это уравнение с начальным условием (18.8), находим *pm*(*t*)=*e*-*mkt*, что совпадает с аналогичным значением в модели чистого рождения. Подставляя результат в уравнение (18.7) при *n=m–*1 и решая это уравнение с нулевым начальным условием, находим значение *pm-*1. Повторяя эту процедуру многократно, находим все значения



где  – биномиальные коэффициенты. Эти значения образуют соответствующее распределение вероятностей[[28]](#endnote-28).

Отметим, что вероятность *pm* того, что численность популяции сохранится такой, как в начальный момент времени, убывает и стремится к нулю. Очевидно, функция *pn* при 0<*n*<*m* обращается в нуль в начальный момент времени, принимает положительные значения при *t*>0 и со временем стремится к нулю. Следовательно, она где-то достигает максимума. Для нахождения этого значения вычисляем производную



Приравнивая это значение нулю, находим точку ln(*m*/*n*)/*k*, в которой вероятность равенства *n* численности популяции максимальна. Наконец, вероятность нулевой численности популяции равна *p*0(*t*)=(1–*e*–*kt*)*m*. Она изначально равна нулю, возрастает и со временем, стремится к единице. Тем самым со всей достоверностью можно утверждать, что со временем вся популяция вымирает. Таким образом, стохастическая модель, в целом, приводит к тому же результату, что и детерминированная модель Мальтуса. Распределение вероятностей для процесса гибели изображено на Рис. 18.3.

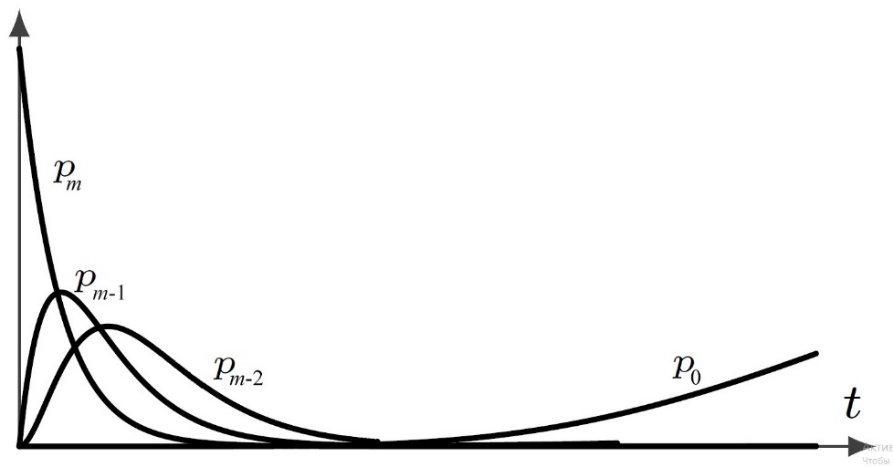


Рис. 18.3. Распределение вероятностей в модели гибели.

Находим математическое ожидание



Итак, в среднем наблюдается вымирание популяции, что согласуется со свойствами детерминированной модели. Соответствующая дисперсия определяется по формуле



Отметим, что в начальный момент времени дисперсия равна нулю, поскольку начальное состояние системы детерминировано. При неограниченном возрастании времени дисперсия также стремится к нулю, поскольку со временем популяция наверняка вымирает. Однако в любой момент времени *t* >0 дисперсия положительна. Тогда в какой-то момент времени она достигает максимального значения. Для его нахождения обращаем в нуль производную



Это уравнение имеет единственное решение *T=k*-1ln2. Ему соответствует значение дисперсии *V=m*/4. Таким образом, максимально ожидаемое отклонение численности популяции от ее математического ожидания равняется четверти от начальной численностью и происходит в момент времени, характеризуемый исключительно коэффициентом, характеризующим вероятность гибели одной особи. График изменения со временем математического ожидания и дисперсии численности популяции представлен на Рис. 18.4.



Рис. 18.4. Математическое ожидание и дисперсия в стохастической модели гибели популяции.

Среди физических аналогов случайного процесса гибели популяции можно отметить процесс ***радиоактивного распада***[[29]](#endnote-29). Здесь случайным событием может служить распад одного нестабильного атомного ядра в некоторый момент времени. Тогда число *x*(*t*) нестабильных атомов в момент времени *t* оказывается случайной величиной. Вероятность распада одного ядра в течение достаточно малого интервала времени будет тем выше, чем больше имеется нестабильных ядер и рассматриваемый интервал времени. В результате распределение вероятностей числа нестабильных ядер будет удовлетворять системе дифференциально-разностных уравнений (18.7), а гибели всей популяции соответствует распад всех нестабильных ядер. Имеются и другие интерпретации рассматриваемой модели[[30]](#endnote-30).

**Задание 18.2. *Модель гибели популяции*.** В соответствии с методом Монте-Карло рассчитать случайный процесс гибели популяции по аналогии с Заданием 18.1. При этом при расчете значения *x*(*ti*) в качестве минимального *n* выбирается минимальное значение *n*, при котором выполняется неравенство *pn*(*ti*)>0.01, а в качестве его максимального значения –значение случайной величины *x*(*ti-*1).

***Модель гибели популяции описывает случайный процесс,  
в котором смерть особи является случайным событием  
Модель характеризуется дифференциально-разностными уравнениями.  
Математическое ожидание процесса соответствует модели Мальтуса.***

#### **4. Стохастическая модель Мальтуса**

Рассмотрим теперь общий случай, когда имеет место как рождение, так и смерть особей рассматриваемого биологического вида. Ему соответствует в простейшем случае модель Мальтуса **, где коэффициент *a* характеризует рождаемость, а *b –* смертность вида. При начальной численности вида *m* решение указанного уравнения определяется по формуле *x*(*t*) = *me*(*a*–*b*)*t*, см. Глава 7. При *a*>*b* здесь наблюдается экспоненциальный рост популяции, как в Разделе 1, при *a*<*b* популяция вымирает, как в Разделе 2, а случай *a*=*b* соответствует неизменной численности популяции.

Обратимся к стохастическому аналогу этой системы. Будем полагать, что вероятность как рождения, так и смертности одна особи в течение достаточно малого интервала времени Δ*t* тем выше, чем больше популяция и данный временной интервал. В частности, считаем, что вероятность рождения одной особи за время Δ*t* при численности популяции *n* равна *an*Δ*t*, а соответствующая вероятность смерти *– bn*Δ*t*. Как и в предшествующих случаях считаем, что интервал времени Δ*t* столь мал, что за это время может произойти, хотя и не обязательно, рождение или смерть лишь одной особи. Тогда наличие ровно *n* особей в последующий момент времени *t*+Δ*t* возможно либо в том случае, когда в предшествующий момент времени *t* число особей было равно *n*, т.е. никто не родился и не умер, либо когда число особей ранее было равно *n–*1, и за время Δ*t* родилась одна особь, либо когда ранее число особей было равно *n*+1, и за время Δ*t* умерла одна особь. Сохраняя прежние обозначения, приходим к равенству

*pn*(*t*+Δ*t*) = *pn*(*t*)(1–*a*–*b*)*n*Δ*t + pn*-1(*t*)*a*(*n*–1)Δ*t + pn*+1(*t*)*b*(*n*+1)Δ*t*.

Отсюда следует



Переходя к пределу при Δ*t*, стремящимся к нулю, получаем дифференциальное уравнение

 (18.9)

являющееся обобщением соотношений (18.1) и (18.7).

Рассмотрим случай *n=*0. Отсутствие особей в последующий момент времени возможно либо когда их не было и в предшествующий момент времени, либо была одна особь, которая умерла за время Δ*t*. В результате получаем равенство *p*0(*t*+Δ*t*) = *p*0(*t*) *+ p*1(*t*)*b*Δ*t*. Отсюда следует уравнение

 (18.10)

Предполагается, что численность популяции в начальный момент равна *m*. Тогда уравнения (18.9), (18.10) пополняется начальными условиями

*pm*(0) = 1; *pn*(0) = 0, *n*≠*m.* (18.11)

Задача (18.9) – (18.11) уже не может быть решена явным образом, как соответствующие уравнения для процессов чистого рождения и гибели, поскольку согласно равенству (18.9) численность популяции может оказаться как больше, так и меньше начальной численности. Тем не менее, и в данном случае для случайного значения численности *x*(*t*)в момент времени *t* могут быть получены[[31]](#endnote-31) значения математического ожидания

 (18.12)

и дисперсии

, (18.13)

являющиеся обобщением соответствующих результатов предшествующих разделов. Кроме того, представляет интерес значение вероятности отсутствия популяции в момент времени *t*

 (18.14)

Согласно формуле (18.12), при *a*>*b*, т.е. в условиях превышения рождаемости над смертностью, ожидаемым результатом является неограниченный рост популяции. При *a*<*b*, т.е. в условиях превышения смертности над рождаемостью, математическое ожидание численности популяции стремится к нулю, что соответствует вымиранию популяции. Наконец, при *a*=*b* справедливо равенство **E**[*x*(*t*)]=*m*, т.е. математическим ожиданием численности популяции в любой момент времени является ее начальная численность. Полученные результаты согласуются с детерминированной моделью Мальтуса.

Согласно формуле (18.13), при *a*>*b* со временем дисперсия неограниченно возрастает, т.е. возможны сколь угодно большие отклонения численности популяции от ее математического ожидания. При *a*<*b* дисперсия стремится к нулю, а значит, со временем численности популяции всё меньше отклоняется от своего математического ожидания. Тем самым наверняка наблюдается гибель популяции. Особую сложность представляет случай *a*=*b*, при котором в нуль обращаются как выражение в знаменателе дроби, так и выражение в квадратных скобках. Можно показать, что в данном случае дисперсия будет равна[[32]](#endnote-32) **Var**[*x*(*t*)]=2*amt*. Таким образом, при *a*=*b* со временем численность популяции может всё сильнее отклоняться от своего математического ожидания, причем тем больше, чем больше ее начальная численность и параметр *a*, характеризующий в данном случае как рождаемость, так и смертность. Этот результат свидетельствует о различии между поведением системы в стохастической и детерминированной модели.

Обратимся теперь к формуле (18.13), характеризующей вероятность нулевой численности популяции в момент времени *t*. При *a*<*b* имеем



Таким образом, в случае превышения смертности над рождаемостью популяция наверняка вымирает. Следовательно, в этом случае предсказания детерминированной и стохастической моделей совпадают.

При *a*=*b* находим



Тем самым в случае совпадения рождаемости и смертности в стохастической модели популяция также со временем вымирает, в то время как детерминированная модель предсказывает неизменность популяции. Это удивительное заключение согласуется с тем, что дисперсия при совпадении рождаемости и смертности неограниченно возрастает со временем. Итак, в этом случае в стохастической модели популяция оказывается нежизнеспособной.

Наконец, в случае превышения рождаемости над смертностью модель Мальтуса говорит о неограниченном росте популяции. Однако для стохастической модели здесь наблюдается следующий результат



Это означает, что, несмотря на ожидаемый рост популяции, в данном случае также случае имеется некоторая вероятность гибели популяции. Эта вероятность тем больше, чем ближе смертность к рождаемости и чем меньше начальная численность популяции. Естественно, при достаточно больших значениях начальной численности вероятность вымирания популяции оказывается ничтожно малой даже при достаточной близости смертности вида к его рождаемости. К примеру, если смертность отличается от рождаемости всего на 1% при начальной численности популяции 210 =1024 (не такое уж большое число) вероятность гибели популяции составляет всего 3.39·10-5.

Сравнительный анализ исходов для детерминированной и стохастической моделей представлена в Таблице 18.3.

Таблица 18.3. Исходы в детерминированной и стохастической моделях Мальтуса.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ситуация*** | **детерминированная модель** | **стохастическая модель** |
| *смертность превышает рождаемость* | вымирание популяции | гарантированное  вымирание популяции |
| *смертность совпадает  с рождаемостью* | неизменность популяции | гарантированное  вымирание популяции |
| *рождаемость превышает смертность* | неограниченный  рост популяции | ожидаемый рост популяции при возможной ее гибели |

**Задание 18.3. *Стохастическая модель Мальтуса*.** В соответствии с методом Монте-Карло рассчитать случайный процесс, описываемый стохастической моделью Мальтуса по аналогии с Заданием 18.1. При расчете значения *x*(*ti*) здесь в качестве минимального (соответственно, максимального) *n* выбирается минимальное (соответственно, максимальное) значение *n*, при котором выполняется неравенство *pn*(*ti*)>0.01. Расчеты проводятся в случае преобладания рождаемости, смертности, а также равенства этих характеристик.

***Стохастическая модель Мальтуса описывает случайный процесс,  
в котором рождение и смерть особей являются случайными событиями.  
Модель характеризуется дифференциально-разностными уравнениями.  
Математическое ожидание процесса соответствует модели Мальтуса.  
Гибель популяции здесь возможна даже в случае  
превышения рождаемости над смертностью.***

**Направление дальнейшей работы**. Мы рассмотрели различные особые классы математических моделей, завершив Часть III курса. В заключительной части будут рассмотрены некоторые дополнительные вопросы, связанные с решениями исследуемых задач, а также проблемы оптимального управления и идентификации систем.

### **ПРИЛОЖЕНИЕ**

В данной лекции исследовались системы, в которых происходят случайные события. Однако стохастические модели появляются и в том случае, когда в рассматриваемых системах какие-либо параметры заданы случайным образом. В частности, в Разделе 5 мы вновь обращаемся к модели Мальтуса. При этом прирост численности популяции считается случайной величиной. В результате численность вида также оказывается случайной величиной, но с непрерывным, а не с дискретным распределением. Различные математические модели со случайными параметрами, относящиеся к физике, химии и эпидемиологии, рассматриваются в Разделе 6. В заключительных двух разделах описываются дискретные стохастические системы, относящиеся к экономике и физике.

#### **5. Модель Мальтуса со случайным приростом численности популяции**

Мы вновь обратимся к модели Мальтуса, которая характеризуется уравнение

** (18.15)

Однако прирост численности вида *k=k*(*t*)в произвольный момент *t* будем считать случайной величиной. Предположим также, что все случайные величины *k*(*t*) не зависят друг от друга и имеет одно и то же нормальное распределение с математическим ожиданием *μ* и дисперсией *σ*2.

Если начальная численность популяции равна *m*, то соответствующее решение уравнения (18.15) определяется по формуле

**

Можно показать[[33]](#endnote-33), что находящийся в правой части этого равенства интеграл, равный ln*x*(*t*)/*m*, также имеет нормальное распределение, но с математическим ожиданием *μt* и дисперсией *σ*2*t*.

Распределение вероятностей случайной величины, натуральный логарифм которой имеет нормальное распределение, называется ***логнормальным***. Учитывая определение плотности вероятности логнормального распределения[[34]](#endnote-34), заключаем что отношение *x*(*t*)/*m* имеет плотность вероятности



Установим свойства функции *f*. Она определена на множестве неотрицательных чисел, является гладкой функцией, принимает неотрицательные значения, обращается в нуль при *ξ*=0 и имеет интеграл по всей области определения, равный единице, см. Рис. 18.5. Тогда *f*(*ξ*)→0 при *ξ*→∞. Таким образом, она должна иметь, по крайней мере, один максимум. Обращая в нуль ее производную, находим ее единственную точку максимума *ξ*\*=*ξ*\*(*t*)=exp[(*μ–σ*2)*t*]. Очевидно, при неограниченном возрастании времени это значение стремится к нулю при *μ<σ*2и к бесконечности при *μ>σ*2.



Рис. 18.5. Плотность вероятности логнормального распределения.

Из определения плотности вероятности следует, что вероятность того, что отношение *x*(*t*)/*m* не превосходит достаточно малого числа *ε*, равна

**

Тогда при достаточно больших *t* в случае *μ<σ*2 значение *pε*(*t*) оказывается сколь угодно близко к единице (см. Рис. 18.6*a*), а в случае *μ>σ*2 – сколь угодно близко к нулю (см. Рис. 18.6*b*). Отсюда следует, что при выполнении неравенства *μ<σ*2 при неограниченном возрастании времени вероятность вымирания популяции стремится нулю. Учитывая, что параметр *μ* является математическим ожиданием прироста популяции, заключаем, что в рассматриваемой модели вымирание популяции возможно даже при положительных значениях этого прироста. Следует отметить, в реальной ситуации различного рода флуктуации неизбежны. Однако для достаточно больших популяций их влияние незначительно, а наблюдаемые значения численности популяции достаточно близки к соответствующим математическим ожиданиям. В случае небольших популяций мы уже не можем пренебрегать указанными явлениями.

  
Рис. 18.6. Оценка вероятности вымирания популяции.

**Задание 18.4. *Модель Мальтуса со случайным приростом популяции*.** В соответствии с методом Монте-Карло рассчитать рассматриваемый случайный процесс. Анализ проводится при выполнении условий *μ<*0, *μ=*0, 0*<μ<σ*2 и *μ>σ*2.

#### **6. Различные модели со случайными параметрами**

В предшествующем разделе была рассмотрена стандартная модель Мальтуса при наличии случайного параметра. Такого типа задачи возникают практически для любых описанных ранее систем. Приведем несколько характерных примеров, относящихся к различным предметным областям.

В Главе 1 была рассмотрена задача о ***полете ракеты***. Ракета была запущена под некоторым углом к горизонту и летела в вертикальной плоскости под действием силы тяги. В некоторый момент времени топливо заканчивалась, ракета продолжала свой полет по инерции и через некоторое время приземлялась ввиду действия гравитационной силы. Сопротивление воздуха здесь не учитывалось. Предположим, что мы решили учесть влияние ветра, действующего в горизонтальной плоскости. При этом сила ветра и его направление считаются случайными величинами.

В отличие от задачи, рассмотренной в Главе 1, движение ракеты будем рассматривать в трехмерном пространстве. При этом в качестве начала координат, как и раньше выбирается точка старта ракеты на земле, а в качестве оси *x* – направление в горизонтальной плоскости, соответствующее направлению запуска ракеты. Вертикальная координата *z* направлена вверх (в рассмотренной ранее модели она обозначалась через *y*), а ось *y* перпендикулярна двум остальным осям. Уравнения движения системы выводятся на основе второго закона Ньютона, причем в направлении *x* действуют проекции силы тяги и силы ветра, в направлении *y* – проекция силы ветра, а в направлении *z* – проекция силы тяги и вес. В результате получаем следующую систему дифференциальных уравнений



где *m* – масса ракеты, *Ft* – модуль силы тяги, *Fw* – модуль силы ветра, *ϕ* – угол в вертикальной плоскости между осью *x* и направлением запуска ракеты, *α* – угол в горизонтальной плоскости между осью *x* и направлением ветра, *g* – ускорение свободного падения. Приведенные уравнения рассматриваются с нулевыми начальными условиями вплоть до известного момента времени, после чего сила тяги полагается равной нулю. Процесс завершается в момент приземления, т.е. при достижении нуля вертикальной координаты ракеты. Особенностью данной модели является то обстоятельство, что величины *Fw* и *α* являются случайными. Для простоты будем считать, что их функции распределения остаются постоянными.

**Задание 18.5. *Полет ракеты со случайным ветром*.** Для рассмотренной выше системы задаются конкретные значения параметров системы, включая распределения величины и направления ветра. Полученная система решается численно, причем на каждом шаге по времени разыгрываются значения *Fw* и *α.* Расчеты проводятся вплоть до момента приземления ракеты с определением максимальной высоты подъема ракеты, координат точки ее приземления и времени движения. Для сравнения проводятся расчеты с теми же параметрами в отсутствии ветра с объяснением полученных результатов.

Второй пример относится к химии. В Главе 6 исследовалась ***реакция синтеза*** A+B→C описываемая системой дифференциальных уравнений



с соответствующими начальными условиями, где *a*, *b* и *c* являются концентрациями соответствующих веществ, а *k* – параметр процесса, называемый константой скорости реакции. Константу *k* можно определить в соответствии с ***уравнением Аррениуса***   
*k=α*exp(–*R*/*ET*), где *α* – предэкспоненциальный множитель, *R* – универсальная газовая постоянная, *E* – энергия активации, *T* – температура. Здесь *R* является известной константой, температуру можно достаточно точно измерить, а величины *α* и *E* считаются случайными. Аналогичным образом могут быть исследованы другие химические реакции со случайными характеристиками реакции.

**Задание 18.6. *Реакция синтеза со случайной константой скорости реакции*.** Для рассмотренной выше системы задаются конкретные значения параметров системы, включая распределения *α* и *E*. Полученная система решается численно, причем на каждом шаге по времени разыгрываются значения указанных величин*.* Для сравнения проводятся расчеты с теми же параметрами, когда в качестве *α* и *E* выбираются их математические ожидания.

Третий из рассматриваемых примеров относится к эпидемиологии. В Главе 7 была приведена ***модель SIR*** распространения эпидемии[[35]](#endnote-35). Она описывалась уравнениями

с соответствующими начальными условиями, где через *S*, *I* и *R* обозначены численности восприимчивых, инфицированных и выздоровевших, *N* – общая численность популяции, т.е. сумма индивидуумов всех трех выше указанных групп, *β* – параметр, характеризующий интенсивность контактов между индивидуумами, а *γ* – параметр, характеризующий интенсивность выздоровления инфицированных индивидов. Начальные состояния системы, а также численность популяции известны. Однако параметры *β* и *γ* можно считать случайными величинами. Аналогичным образом могут быть исследованы другие модели эпидемиологии со случайными параметрами[[36]](#endnote-36).

**Задание 18.7. *Модель* SIR *со случайными параметрами*.** Для рассмотренной выше системы задаются конкретные значения параметров системы, включая распределения *β* и *γ*. Полученная система решается численно, причем на каждом шаге по времени разыгрываются значения указанных величин*.* Расчеты проводятся вплоть до того времени, когда с достаточно большой степенью точности все больные выздоровеют. Для сравнения проводятся расчеты с теми же параметрами, когда в качестве *β* и *γ* выбираются их математические ожидания.

#### **7. Дискретная модель продажи товаров**

Рассмотрим простейшую задачу о продаже товаров[[37]](#endnote-37). Предполагаем, что вероятность продажи единицы товара в единицу времени равно *k*. Обозначим через *pj*(*n*) вероятность того, что в момент времени *n* продано *j* единиц товара. Предположим, что в начальный момент времени *n=*0 товары еще продавались. Тогда справедливы равенства

*p*0(0)=1, *pj*(0)=0 для всех *j*>0.

В момент времени 1 может оказаться либо еще ничего не продано с вероятностью 1–*k*, либо продана одна единица товара с вероятностью *k*. Тогда

*p*0(1)=1–*k*, *p*1(1)=*k*, *pj*(1)=0 для всех *j*>1.

В момент времени 2 либо по-прежнему ничего не продано с вероятностью (1–*k*)2 (за оба интервала времени продаж не было), либо продано 1 единица товара с вероятностью 2(1–*k*)*k* (возможно, продажа состоялась в первый интервал и не состоялась во второй, а, возможно, наоборот), либо 2 единицы с вероятностью *k*2 (за оба интервала времени продажа состоялась). Тогда

*p*0(2)=(1–*k*)2, *p*1(2)=2*k*(1–*k*), *p*2(2)=*k*2, *pj*(0)=0 для всех *j*>2.

В момент времени 3 может оказаться, что ничего не продано с вероятностью (1–*k*)3 (за все три интервала времени продажа не состоялась), либо продана 1 единица продукции с вероятностью 3(1–*k*)2*k* (в один из трех интервалов времени продажа состоялась, а в остальные нет), либо 2 единицы с вероятностью 3(1–*k*)*k*2 (за любые два из трех интервалов времени продажа состоялась, а за один – нет), либо 3 единицы с вероятностью *k*3 (в каждый из интервалов продажа состоялась).

Аналогичным образом в произвольный момент времени *n* товары могут оказаться нераспроданными с вероятностью (1–*k*)*n*, либо продана 1 единица товара с вероятностью  либо 2 единицы с вероятностью …, либо *n* единиц с вероятностью *kn*, где  – биномиальные коэффициенты. В результате для каждого момента времени *n* находим вероятности[[38]](#endnote-38) где *j=*0,…,*n*. В более поздние моменты времени *j* эта вероятность будет равна нулю. Отметим, что если в Разделах 1,3 и 4 рассматривались системы с непрерывным временем и дискретным распределением случайных величин, а в Разделах 5 и 6 время и случайные величины были распределены непрерывно, то в данном случае, как время, так и случайные величины распределены дискретно.

Для случайной величины *xj*, описывающей количество проданного товара в момент времени *j* можно найти математическое ожидание и дисперсию

**E**[*xj*] = *kj*, **Var**[*xj*] = *k*(1– *k*)*j*.

Таким образом, число проданных товаров в среднем растет линейно. Однако со временем возможны всё большие отклонения количество проданных товаров от его математического ожидания.

#### **8. Прохождение нейтрона через пластину**

В ядерной физике возникают задачи взаимодействия нейтронов с веществом[[39]](#endnote-39). Рассмотрим простейшую задачу прохождения потока нейтронов через бесконечную пластину заданной толщины *h*. Предполагается, что нейтроны движутся в направлении, перпендикулярном поверхности пластины. В процессе движения нейтрона внутри пластины происходит его взаимодействие с атомами вещества, из которого состоит пластина. Характеристикой такого взаимодействия является ***сечение*** Σ, представляющее собой отношение числа нейтронов, испытавших взаимодействие, к общему количеству нейтронов, проходящих через единичную площадку. Эта величина является параметром рассматриваемого процесса.

При взаимодействии нейтрона с атомом вещества пластины происходит либо его поглощение атомом, либо рассеяние, при котором нейтрон продолжает свое движение, но уже в новом направлении. При этом сечение взаимодействия Σ складывается из сечения поглощения Σ*c* и сечения рассеяния Σ*s*. Тем самым отношение Σ*c*/Σ описывает вероятность поглощения нейтрона атомом, а Σ*s*/Σ – вероятность его рассеяния. Предполагается также, что в случае рассеяния энергия нейтрона после столкновения с атомом не меняется, а любое направление его дальнейшего движения равновероятно. Длина пути нейтрона между двумя соударениями *λ* называется ***длиной свободного пробега***. Будем полагать, что она является случайной величиной с плотностью вероятности *f*(*ξ*)=Σ*e*–Σ*ξ*.

Движение отдельного нейтрона сквозь пластину может иметь три различных исхода: либо он поглотится веществом пластины, либо пройдет сквозь нее, либо отразится от нее и продолжит движение в обратном направлении. Цель исследования состоит в оценке вероятности каждого из этих исходов в зависимости от выше указанных параметров процесса. Для решения этой задачи многократно разыгрывается движение нейтрона, начиная с его попадания на пластину и заканчивая либо его поглощением, либо выходом за пределы пластины в ту или иную сторону. А затем подсчитывается частота каждого из рассматриваемых исходов. Отметим, что рассматриваемый процесс на каждом шаге движения нейтрона связан с тремя независимыми случайными величинами: длиной свободного пробега, направлением движения и реализацией поглощения либо рассеяния.

Выбираем координату *x*, направленную поперек пластины, причем точка *x*=0 соответствует входу нейтрона в пластину. Весь процесс движения нейтрона внутри пластины складывается из отдельных его движений между рассеяниями атомами пластины. Обозначим через *xj* координату нейтрона в направлении оси *x* в точке его *j*-ого рассеяния, считая *x*0=0. Предположим, что значение *xj* известно. Определение последующего значения *xj+*1 сводится к разыгрыванию длины свободного пробега и направления движения.

Пользуясь методом Монте-Карло, выбираем значение непрерывной случайной величины *λ* с указанной выше плотностью вероятности *f*. В соответствии с формулой (8.6) в качестве ее значения выбирается решение *l* уравнения

**

где *p –* произвольное число из единичного отрезка. Последнее равенство приводится к виду   
1–*e*–Σ*l*=*p*, откуда находим *l*=–ln(1–*p*)/Σ. Очевидно, величина *q=*1–*p* также оказывается произвольным числом из единичного отрезка. Таким образом, в качестве значения длины свободного пробега *λ* можно выбрать число *l*=–ln*q*/Σ с произвольным *q* из единичного отрезка.

Итак, мы знаем, как далеко пройдет нейтрон до следующего столкновения с атомом пластины. Однако требуется еще определить направление его движения. Равноправность всех направлений движения соответствует выбору произвольного угла *ϕ* между этим направлением и осью *x*, что эквивалентно произвольному выбору косинуса этого угла из интервала [–1,1]. Плотность равномерного распределения вероятностей на некотором отрезке длины *l* постоянна и равна 1/*l.* Тогда согласно формуле (8.6) в качестве значения указанного косинуса выбирается решение *s* уравнения

**

где *p –* произвольное число из единичного отрезка. В результате находим значение cos*ϕ=*2*p–*1.

Зная направление движения нейтрона и пройденный путь, координату его следующего взаимодействия в направлении оси *x* (см. Рис. 18.7) *xk+*1= *xk+c*cos*ϕ.* После этого осуществляется проверка на возможность завершения движения нейтрона в пластине. Прежде всего, выбирается произвольное число из интервала [0,1]. Если оно оказывается меньше отношения Σ*c*/Σ, то полагается, что нейтрон поглотился атомом. Если этого не произошло, но выполнено неравенство *xk+*1<0, то нейтрон отразился от пластины. Если и этого не произошло, но справедливо неравенство *xk+*1>*h*, то нейтрон пролетел сквозь пластину. В противном случае нейтрон продолжает свое движение внутри пластины, и осуществляется поиск новой точки соударения нейтрона и атома пластины[[40]](#endnote-40). После многократного просчета движений нейтрона определяются частоты (отношения данного исхода к общему числу экспериментов) поглощения нейтрона, его отражения и прохождения сквозь пластину, которые и являлись целью исследования.



Рис. 18.7. Движение нейтрона между двумя взаимодействиями.

**Задание 18.8. *Прохождение нейтрона через пластину*.** Провести расчеты системы на основе описанного алгоритма. Установить влияние на результат параметров *h*, Σ, Σ*c*.

### **КОММЕНТАРИИ**

1. ***Теория вероятностей*** представляет собой раздел математики, изучающий случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними, см. Billingsley, Feller, Gut, Kallenberg. [↑](#endnote-ref-1)
2. ***Математическая статистика*** является разделом математики, разрабатывающим методы регистрации, описания и анализа данных наблюдений и экспериментов с целью построения вероятностных моделей массовых случайных явлений, см. Bulmer, Hogg, Larsen. [↑](#endnote-ref-2)
3. Различные стохастические модели биологических процессов рассматриваются в Allman, ClarkC, Muller, Riznichenko, Svirezhev. Широкий класс стохастических моделей описывается также в Andrews, Gershenfeld, Meerschaert, Moghadas. [↑](#endnote-ref-3)
4. В Главе 19 будут рассмотрены математические модели, представляющие собой задачи, допускающие неоднозначное решение. Каждое из таких решений соответствует некоторому возможному варианту реализации описываемых ими физических процессов. Реализация того или иного варианта здесь осуществляется случайным образом. [↑](#endnote-ref-4)
5. Событие является ***случайным***, если оно реализуется в результате некоторого эксперимента, результат которого не представляется возможным точно предугадать. [↑](#endnote-ref-5)
6. ***Случайная величина*** является центральным понятием теории вероятностей. Она характеризует случайное событие с помощью понятия вероятности, представляющей собой меру возможности наступления этого события. [↑](#endnote-ref-6)
7. ***Случайным процессом*** называется семейство случайных величин с некоторым параметром, как правило, имеющим смысл времени, см. Bharucha, Doob, Jacobs. [↑](#endnote-ref-7)
8. ***Вероятность*** представляет собой количественную оценку возможности наступления случайного события. Вероятность ***достоверного события*** (события, которое наверняка происходит) полагается равным единицы, а вероятность ***невозможного события*** (события, которое наверняка не происходит) считается равным нулю. Событие, которое может произойти, но не обязательно происходит, имеет вероятность, лежащую между нулем и единицей. Эмпирически вероятность связана с частотой появления рассматриваемого события в достаточно большой серии однотипных экспериментов. Аксиоматически вероятность определяется с помощью ***теории меры***, см. Billingsley, Halmos. [↑](#endnote-ref-8)
9. В Главе 7 рассматривалась модель Ферхюльста, в которой производная численности вида квадратично зависела от самой численности. Стохастическая модель развития популяции с квадратичной зависимостью вероятности рождения и смерти особи от численности вида рассматривается, например, в Roehner. [↑](#endnote-ref-9)
10. Преобразование, которое сопоставляет каждому значению некоторой случайной величины вероятность того, что эта величина принимает данное значение, называется ***функцией вероятности***. [↑](#endnote-ref-10)
11. ***События несовместны***, если вероятность того, что они наступают одновременно в результате однократного эксперимента равна нулю. [↑](#endnote-ref-11)
12. ***Условная вероятность*** – это вероятность наступления одного события при условии выполнении второго события. В частности, здесь рассматривается вероятность рождения особи за время *dt* при условии, что численность популяции принимает заданные значения. [↑](#endnote-ref-12)
13. ***Распределение вероятностей*** – это закон, описывающий область значений случайной величины и соответствующие вероятности появления этих значений. [↑](#endnote-ref-13)
14. О дифференциально-разностных уравнениях см. Bellman. [↑](#endnote-ref-14)
15. Действительно, уравнение  можно записать в виде

    Интегрируя это равенство с нулевыми начальными условиями, получаем *p*2(*t*)*e*2*kt=ekt* –1, откуда следует, что *p*2(*t*)*=*(1–*e-kt*)*e-kt*. Аналогичным образом решается уравнение (18.1) для произвольных значений *n*. [↑](#endnote-ref-15)
16. Действительно, находим производную

    откуда следует *e-kt*=1/*n*. Таким образом, максимум функции *pn* достигается в момент времени ln*n*/*k* и равен   
    (*n*–1)*n*–1/*nn*. [↑](#endnote-ref-16)
17. В данном случае мы имеем дело с ***дискретным распределением*** численности популяции в произвольный момент времени *t*. Эта случайная величина может принимать значения *n*, равные 0,1,2, …, причем вероятность того, что она принимает конкретное значение *x* лежит на интервале [0,1], а сумма всех таких вероятностей равна единице. В частности, пользуясь свойством геометрической прогрессии, установим, что сумма по всем *n* вероятностей того, что численность популяции равна значению *n*, в любой момент времени равна единице:

    Соответствующий случайный процесс называется ***процессом Юла–Фарри***. [↑](#endnote-ref-17)
18. Действительно, определим значение *z=*1–*e-kt*. Учитывая, что 0<*z*<1, имеем

     [↑](#endnote-ref-18)
19. Действительно, справедливо равенство

    Пользуясь определением математического ожидания, находим

    где *z=*1–*e-kt*. Учитывая очевидное равенство

    определяем

    В результате получаем

     [↑](#endnote-ref-19)
20. ***Биномиальные коэффициенты***  появляются в процессе разложения бинома Ньютона (1+*x*)*n* по степеням *x*

    Они определяются по формуле

    где *k*! обозначает факториал числа, т.е. произведение всех натуральных чисел от 1 до *k*, причем 0!=1. [↑](#endnote-ref-20)
21. О цепных ядерных реакциях см. Bertulani, Stacey. [↑](#endnote-ref-21)
22. О цепных химических реакциях см. Laidler. [↑](#endnote-ref-22)
23. О ***методе Монте-Карло*** см. Fishman, Sobol'. Различные прикладные задачи, решаемые с помощью метода Монте-Карло, приводятся, например, в Bender, Gould. В действительности имеет смысл говорить не об одном методе, а о группе методов Монте-Карло, в которых реализуется описываемая идея. [↑](#endnote-ref-23)
24. Случайные величины являются ***независимыми***, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.  [↑](#endnote-ref-24)
25. Произвольный выбор точки из единичного интервала на компьютере осуществляется с помощью генератора случайных чисел. [↑](#endnote-ref-25)
26. Если имеются трудности с нахождением значения *c* из уравнения (18.6), то используются другие способы поиска, см. Fishman, Sobol'. [↑](#endnote-ref-26)
27. Методы Монте-Карло имеют порядок точности ** [↑](#endnote-ref-27)
28. Учитывая формулу бинома, получаем

    Таким образом, вероятность того, что случайная величина *x*(*t*) принимает одно из значений 0,1,…,*m* равна единице. [↑](#endnote-ref-28)
29. О радиоактивном распаде см. Bertulani, Stacey. [↑](#endnote-ref-29)
30. В частности, в Bharucha рассматривается задача о разорении игрока, а в Shakenov – задача о разорении фирмы. [↑](#endnote-ref-30)
31. Эти результаты получаются ***методом производящих функций***, см. Bulmer. [↑](#endnote-ref-31)
32. Требуется найти предел

    Здесь числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, т.е. мы имеем дело с неопределенностью 0/0. В соответствии с ***правилом Лопиталя***, если имеются такие функции *f=f*(*b*) и *g=g*(*b*), что *f*(*a*)=0 и *g*(*a*)=0, но *g*'(*a*)≠0, то справедливо равенство

    если последний предел существует. В данном случае *f*(*b*)=*e*(*a-b*)*t* –1, *g*(*b*)=*a*–*b*. Очевидно, *f* '(*b*)=–*te*(*a-b*)*t*, *g* '(*b*)=–1. В результате находим

     [↑](#endnote-ref-32)
33. Этот результат является следствием ***центральной предельной теоремы***, согласно которой, сумма достаточно большого количества слабо зависимых случайных величин, имеющих примерно одинаковые масштабы, имеет распределение, близкое к нормальному, см. Feller, Gut, Kallenberg. [↑](#endnote-ref-33)
34. О логнормальном распределении см. CrowE. [↑](#endnote-ref-34)
35. Можно записать стохастический аналог модели SIR, как и других моделей эпидемиологии, считая заражение, выздоровление, смерти и т.д. человека на некотором интервале времени случайным событием. [↑](#endnote-ref-35)
36. В Главе 17 рассматривалась модель развития эпидемии с конечным временем нахождения в группе контактных и различных форм больных. При этом время нахождения в той или иной категории считалось известным. В действительности эти величины являются случайным. Вследствие этого представляется целесообразным рассмотрение указанной модели с соответствующими случайными параметрами. Стохастические модели эпидемиологии рассматриваются в Shakenov2. [↑](#endnote-ref-36)
37. Стохастические модели экономических систем рассматриваются, например, в Dunbar, Etheridge, Stachurski. В Kemeny, Marchi описываются некоторые стохастические модели социологии. [↑](#endnote-ref-37)
38. Рассматриваемое распределение вероятностей называется ***биномиальным***. Пользуясь формулой бинома, для любого момента времени *n* имеем

    т.е. мы действительно имеем дело с распределением вероятностей. [↑](#endnote-ref-38)
39. Метод Монте-Карло в задаче прохождения нейтронов через пластину рассматривается, например, в Sobol'. [↑](#endnote-ref-39)
40. Совокупность всех значений {*xk*} от входа данного нейтрона в пластину до конкретного исхода является дискретным случайным процессом, называемым ***цепью Маркова***. Это означает, что вероятность каждого последующего события определяется исключительно от состояния, достигнутого на предшествующим шаге. [↑](#endnote-ref-40)